ФИЗИКА

УДК 539.12.01

МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО ПОВОРОТА ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ В ИМПУЛЬСНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ И РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Ю.А. Гришечкин, М.С. Данильченко, В.Н. Капшай

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

COMPLEX SCALING METHOD FOR TWO-PARTICLE EQUATIONS IN THE MOMENTUM REPRESENTATION AND RESONANCE STATES

Y.A. Grishechkin, M.S. Danilchenko, V.N. Kapshai

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Метод комплексного поворота применён к нерелятивистским и релятивистским двухчастичным уравнениям в импульсном представлении для нахождения резонансных состояний. Проведено сравнение полученных в импульсном представлении спектров резонансных состояний с аналогичными результатами, полученными в координатном представлении для уравнения Шрёдингера и релятивистском конфигурационном представлении для двухчастичных релятивистских уравнений. Показано хорошее согласие результатов, полученных в различных представлениях.

Ключевые слова: *релятивистские двухчастичные уравнения, метод комплексного поворота, резонансные состояния, импульсное представление, релятивистское конфигурационное представление.*

The complex scaling method is applied to the non-relativistic and relativistic two-particle equations in the momentum representation for resonance sates finding. The comparison of the resonance states spectra obtained in the momentum representation with the similar results obtained in the coordinate representation for the Schrödinger equation and in the relativistic configurational representation for the two-particle relativistic equations is carried out. A good agreement of the results obtained in different representations is shown.

Keywords: *relativistic two-body equations, complex scaling method, resonance states, momentum representation, relativistic configuration representation.*

Введение

Проблема нахождения спектров резонансных состояний двухчастичных систем – одна из актуальных в квантовой теории. Резонансным состояниям соответствуют полюса S-матрицы (и амплитуды рассеяния), лежащие в четвёртом квадранте комплексной плоскости импульса q [1], [2]. Однако прямое численное решение уравнения Шрёдингера (без его преобразования) возможно только в полуплоскости $\operatorname{Im} q \geq \tilde{q}_{\min}$, т. е. если и можно найти комплексные резонансные значения импульса, то очень ограниченное их число. При таком прямом решении резонансы, для которых $\operatorname{Im} \tilde{q} < \tilde{q}_{\min}$, остаются не выявленными. Для решения проблемы их нахождения в работах [3], [4] было предложено использовать метод комплексного поворота для дифференциального уравнения Шрёдингера в координатном представлении. Впоследствии этот метод применялся в очень большом количестве работ для исследования резонансных состояний квантовомеханических систем. В работах [5]–[7] было предложено применять метод комплексного поворота для интегральных уравнений квантовой механики.

Метод комплексного поворота позволяет изменить область существования численных решений уравнения Шрёдингера и определить резонансы, которые без этого метода не выявляются. В работе [8] было предложено применить метод комплексного поворота для нахождения резонансных состояний релятивистских составных систем к двухчастичным интегральным уравнениям [9], [10] в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [11]. В отличие от случая квантовой механики, получение решений релятивистских двухчастичных интегральных уравнений без комплексного поворота возможно только в полосе $\tilde{q}_{\min} \leq \operatorname{Im} q \leq \tilde{q}_{\max}$. В результате применения метода комплексного поворота решение двухчастичных интегральных уравнений возможно также в некоторой полосе комплексной области q, повёрнутой относительно исходной.

При решении нерелятивистских и релятивистских уравнений в импульсном представлении (ИП) проблема нахождения резонансов остаётся. При этом многие потенциалы, входящие в эти уравнения, могут быть сформулированы в импульсном представлении и **не могут** быть записаны в виде аналитических выражений в координатном представлении или в РКП. В связи с этим возникает вопрос о возможности применения метода комплексного поворота в ИП.

© Гришечкин Ю.А., Данильченко М.С., Капшай В.Н., 2014

В данной работе метод комплексного поворота использован для нахождения резонансных состояний на основании решения уравнения Липпмана – Швингера и релятивистских двухчастичных уравнений в импульсном представлении.

1 Релятивистские уравнения для резонансных состояний

Релятивистские уравнения в импульсном представлении для сферически симметричных волновых функций $\psi_{(j)}(\chi_q,\chi)$, описывающих состояния рассеяния системы двух частиц равной массы m имеют вид

$$\psi_{(j)}(\chi_q,\chi)=\frac{\pi}{2m}\delta(\chi_q-\chi)-\frac{2m}{\pi}G_{(j)}(\chi_q,\chi)\int_0^\infty d\chi' V(\chi,\chi')\psi_{(j)}(\chi_q,\chi'), \tag{1.1}$$

где индекс $j=1,2,3,4$ соответствует одному из вариантов квазипотенциального подхода [9]–[11]: $j=1$ $(j=3)$ – уравнение Логунова – Тавхелидзе (модифицированное), $j=2$ $(j=4)$ – уравнение Кадышевского (модифицированное). В уравнениях (1.1) величина $\chi_q\ge 0$ – быстрота, связанная с импульсом q соотношением $q=m\,\mathrm{sh}\,\chi_q$ (аналогично $p=m\,\mathrm{sh}\,\chi$, $k=m\,\mathrm{sh}\,\chi'$), $V(\chi,\chi')$ – потенциал, $G_{(j)}(\chi_q,\chi)$ – функции Грина имеющие вид:

$$G_{(1)}(\chi_q,\chi)=\frac{1}{m^2\left(\mathrm{ch}^2\chi-\mathrm{ch}^2\chi_q-i0\right)};$$
$$G_{(2)}(\chi_q,\chi)=\frac{1}{m^2\,\mathrm{ch}\,\chi\left(2\,\mathrm{ch}\,\chi-2\,\mathrm{ch}\,\chi_q-i0\right)}; \tag{1.2}$$
$$G_{(3)}(\chi_q,\chi)=\frac{\mathrm{ch}\,\chi}{m^2\left(\mathrm{ch}^2\chi-\mathrm{ch}^2\chi_q-i0\right)};$$
$$G_{(4)}(\chi_q,\chi)=\frac{1}{m^2\left(2\,\mathrm{ch}\,\chi-2\,\mathrm{ch}\,\chi_q-i0\right)}.$$

Для резонансных состояний быстрота χ_q становится комплексной $\chi_q=\xi_q+iw_q$, а уравнения (1.1) модифицируются в однородные:

$$\psi_{(j)}(\xi_q+iw_q,\chi)=-\frac{2m}{\pi}G_{(j)}(\xi_q+iw_q,\chi)\times\int_0^\infty d\chi' V(\chi,\chi')\psi_{(j)}(\xi_q+iw_q,\chi'). \tag{1.3}$$

В РКП уравнения для резонансных состояний (1.3) принимают вид

$$\psi_{(j)}(\xi_q+iw_q,r)=\int_0^\infty dr' G_{(j)}(\xi_q+iw_q,r,r')V(r')\psi_{(j)}(\xi_q+iw_q,r'), \tag{1.4}$$

где r – модуль радиус-вектора в РКП. Волновые функции, функции Грина и потенциалы в ИП связаны с соответствующими величинами в РКП соотношениями

$$\psi_{(j)}(\chi_q,r)=\int_0^\infty d\chi\sin(\chi mr)\psi_{(j)}(\chi_q,\chi); \tag{1.5}$$

$$G_{(j)}(\chi_q,r,r')=-\frac{2m}{\pi}\int_0^\infty d\chi\sin(\chi mr)G_{(j)}(\chi_q,\chi)\sin(\chi mr'); \tag{1.6}$$

$$V(\chi,\chi')=\int_0^\infty dr\sin(\chi mr)V(r)\sin(\chi' mr). \tag{1.7}$$

Функции Грина в РКП, полученные подстановкой выражений (1.2) в формулу (1.6) и последующим вычислением интегралов, имеют следующий вид [12], [13]:

$$G_{(j)}(\chi_q,r,r')=G_{(j)}(\chi_q,r-r')-G_{(j)}(\chi_q,r+r'); \tag{1.8}$$
$$G_{(1)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{m\,\mathrm{sh}\,2\chi_q}\frac{\mathrm{sh}(\pi/2+i\chi_q)mr}{\mathrm{sh}\,\pi mr/2};$$
$$G_{(3)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{2m\sinh\chi_q}\frac{\mathrm{ch}(\pi/2+i\chi_q)mr}{\mathrm{ch}\,\pi mr/2};$$
$$G_{(2)}(\chi_q,r)=\frac{(4m\,\mathrm{ch}\,\chi_q)^{-1}}{\mathrm{ch}\,\pi mr/2}-\frac{i}{m\,\mathrm{sh}\,2\chi_q}\frac{\mathrm{sh}(\pi+i\chi_q)mr}{\mathrm{sh}\,\pi mr};$$
$$G_{(4)}(\chi_q,r)=\frac{-i}{2m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\frac{\mathrm{sh}(\pi+i\chi_q)mr}{\mathrm{sh}\,\pi mr}.$$

Нерелятивистский предел ($\chi_q\to 0$, $m\to\infty$) уравнений (1.1), (1.3), (1.4) и функций Грина (1.2), (1.8) даёт уравнения квантовой механики [1], [2]

$$\psi_{(0)}(q,p)=\frac{\pi}{2}\delta(q-p)-\frac{2}{\pi}G_{(0)}(q,p)\int_0^\infty dkV(p,k)\psi_{(0)}(q,k), \tag{1.9}$$

$$\psi_{(0)}(q_1+iq_2,p)=-\frac{2}{\pi}G_{(0)}(q_1+iq_2,p)\times\int_0^\infty dkV(p,k)\psi_{(0)}(q_1+iq_2,k), \tag{1.10}$$

$$\psi_{(0)}(q_1+iq_2,r)=\int_0^\infty dr' G_{(0)}(q_1+iq_2,r,r')V(r')\psi_{(0)}(q_1+iq_2,r'), \tag{1.11}$$

и их функции Грина

$$G_{(0)}(q,p)=\frac{1}{q^2-p^2-i0};$$
$$G_{(0)}(q,r,r')=\frac{-i}{2q}\left[\exp(iq\,|r-r'|)-\exp(iq(r+r'))\right], \tag{1.12}$$

где введены следующие обозначения для нерелятивистских импульсов

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\chi_q\to 0\\ m\to\infty}}\chi_q m = q,\\ &\lim_{\substack{\chi\to 0\\ m\to\infty}}\chi m = p,\\ &\lim_{\substack{\chi'\to 0\\ m\to\infty}}\chi' m = k,\\ &\lim_{\substack{\xi_q\to 0\\ m\to\infty}}\xi_q m = q_1,\\ &\lim_{\substack{w_q\to 0\\ m\to\infty}}w_q m = q_2.\end{aligned} \tag{1.13}$$

Не проводя в этой работе доказательства возможности применения метода комплексного поворота в ИП, мы, тем не менее, воспользуемся этим методом для решения релятивистских уравнений (1.3) и уравнения квантовой механики (1.10).

Суть метода комплексного поворота в координатном представлении и в РКП заключается в замене в уравнениях (1.4) и (1.11) вещественных переменных r и r' комплексными $z = r\exp(i\theta)$ и $z' = r'\exp(i\theta)$, т. е. в повороте координат в комплексной плоскости на угол θ против часовой стрелки [3], [4], [8]. В нерелятивистском уравнении (1.10) в ИП перейдём от вещественных импульсов p, k к комплексным $P = p\exp(-i\theta)$, $P' = k\exp(-i\theta)$ и представим полученное таким образом уравнение в следующем виде

$$\psi_{(0)}^{(\theta)}(q_1+iq_2,p) = -\frac{2}{\pi}G_{(0)}^{(\theta)}(q_1+iq_2,p)\times \times\int_0^\infty dkV^{(\theta)}(p,k)\psi_{(0)}^{(\theta)}(q_1+iq_2,k), \tag{1.14}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}&\psi_{(0)}^{(\theta)}(q,p) = \psi_{(0)}(\chi_q,P);\\ &G_{(0)}^{(\theta)}(q,p) = G_{(0)}(q,P);\\ &V^{(\theta)}(p,k) = \exp(-i\theta)V(P,P').\end{aligned} \tag{1.15}$$

Совершим аналогичные преобразования в релятивистских уравнениях (1.3) перейдя от вещественных быстрот χ, χ' к комплексным величинам $\zeta = \chi\exp(-i\theta)$, $\zeta' = \chi'\exp(-i\theta)$ и запишем преобразованные уравнения в виде

$$\psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q+iw_q,\chi) = -\frac{2}{\pi m}G_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q+iw_q,\chi)\times \times\int_0^\infty d\chi' V^{(\theta)}(\chi,\chi')\psi_{(j)}^{(\theta)}(\xi_q+iw_q,\chi'), \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned}&\psi_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q,\chi) = \psi_{(j)}(\chi_q,\zeta);\\ &G_{(j)}^{(\theta)}(\chi_q,\chi) = G_{(j)}(\chi_q,\zeta);\\ &V^{(\theta)}(\chi,\chi') = \exp(-i\theta)V(\zeta,\zeta').\end{aligned}$$

Таким образом, в ИП совершается поворот переменных p и k (χ и χ') в комплексной плоскости на угол θ по часовой стрелке.

2 Результаты численного анализа

Для численного решения интегральных уравнений (1.14) и (1.16) был использован метод составных квадратур Гаусса, который применялся ранее для решения аналогичных уравнений в случае связанных состояний в работе [14]. Замена в уравнениях интегралов суммами по квадратурной формуле даёт однородные системы линейных алгебраических уравнений

$$M\psi = 0, \tag{2.1}$$

где M – основные матрицы систем, ψ – векторы, составленные из значений волновых функций в узловых точках квадратурной формулы. Условие существования ненулевого решения системы уравнений $\mathrm{D} = \det M = 0$ выполняется лишь для некоторых комплексных значений импульса $q = q_1 + iq_2$ (комплексных значений быстроты в релятивистском случае $\chi_q = \xi_q + iw_q$), которые являются резонансными значениями.

Решения уравнений (1.14) и (1.16) найдём в случае следующего потенциала:

$$V(r) = V_2 r^2 e^{-\alpha r}. \tag{2.2}$$

Потенциал (2.2) был использован ранее для изучения резонансных состояний в квантовой механике [5]–[7] и в релятивистской теории [8]. При этом в нерелятивистском случае r – модуль радиус-вектора в координатном представлении, а в релятивистском случае координата в РКП. В ИП в релятивистском случае потенциал (2.2) имеет вид

$$V(\chi,\chi') = = V_2\alpha\left(\frac{\alpha^2 - 3m^2(\chi-\chi')^2}{\left(m^2(\chi-\chi')^2+\alpha^2\right)^3} - \frac{\alpha^2 - 3m^2(\chi+\chi')^2}{\left(m^2(\chi+\chi')^2+\alpha^2\right)^3}\right), \tag{2.3}$$

в нерелятивистском случае выражение $V(p,k)$ аналогично (2.3) с заменой $m\chi \to p$ и $m\chi' \to k$. На рисунке 2.1 приведены нули детерминанта как функции мнимой и действительной части импульса q для значений угла $\theta = 0.7$, полученные при решении уравнения Шрёдингера в координатном представлении и уравнения (1.14) в импульсном представлении: нули действительной части детерминанта основной матрицы системы M изображены сплошной линией, а нули мнимой части – штриховой, резонансы обведены кружками. На рисунках 2.2 и 2.3 приведены результаты вычислений резонансов системы, полученные при решении релятивистских уравнений $j = 1{,}3$ в РКП и ИП для $m = 1$, $\alpha = 1$, $\theta = 0.7$, $V_2 = 15$.

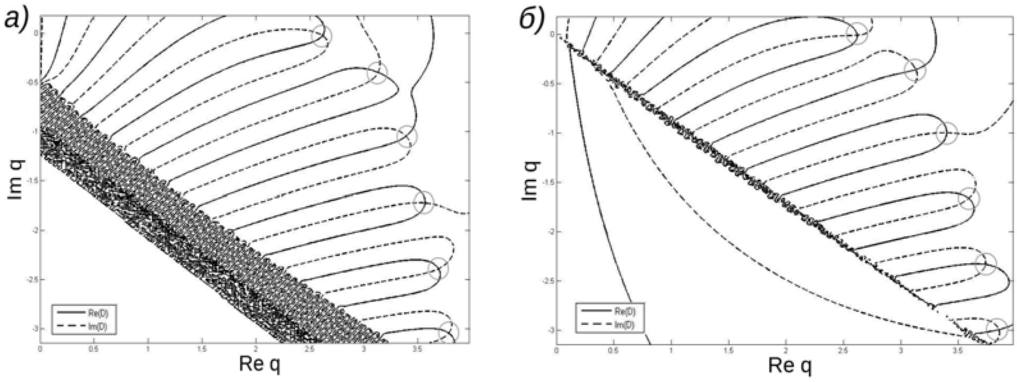

Рисунок 2.1 – Нули детерминанта, полученные решением уравнения Шредингера после комплексного поворота $(\theta = 0.7)$:

а) в координатном представлении; б) в импульсном представлении

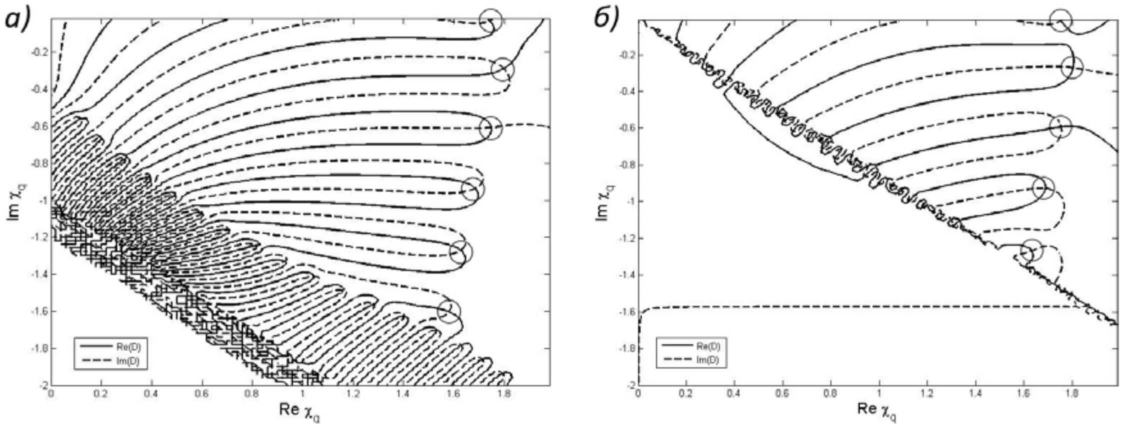

Рисунок 2.2 – Нули детерминанта, полученные решением уравнения $j = 1$

а) в РКП; б) в ИП

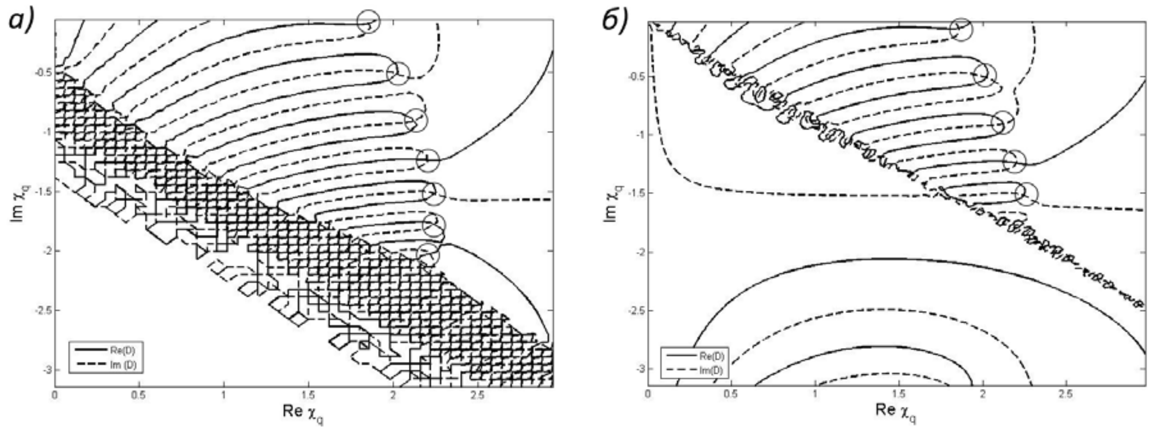

Рисунок 2.3 – Нули детерминанта, полученные решением уравнения $j = 3$ в

а) в РКП; б) в ИП

На рисунках видно, что резонансные значения импульса, полученные решением уравнений в ИП и в координатном представлении (или в РКП) совпадают, т. е. метод комплексного поворота может быть использован в ИП. Количество резонансов, открываемых при повороте в координатном представлении (или в РКП) и в ИП на один и тот же угол, не обязательно одинаково. В дальнейшем мы планируем исследовать различные свойства метода комплексного поворота в импульсном представлении.

Заключение

В работе предложено применение метода комплексного поворота для нахождения резонансных состояний на основании нерелятивистского и релятивистских уравнений в импульсном представлении. Сравнение результатов, полученных при решении уравнений после применения метода комплексного поворота в двух разных представлениях (координатном и импульсном, релятивистском конфигурационном и импульсном) показало, что метод комплексного поворота даёт правильные результаты в импульсном представлении. В дальнейшем мы планируем применить метод комплексного поворота для исследования других нерелятивистских и релятивистских потенциалов в импульсном представлении, в том числе не допускающих аналитического вида в координатном или в релятивистском конфигурационном представлениях и изучить его различные свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тейлор*, *Дж.* Теория рассеяния / Дж. Тейлор. – Москва : Мир, 1975. – 568 с.

2. *Ньютон*, *Р.* Теория рассеяния волн и частиц / Р. Ньютон. – Москва : Мир, 1969. – 608 с.

3. *Nutall*, *J.* Method of Complex Coordinates for Three-Body Calculations above the Breakup Threshold / J. Nutall, H.L. Cohen // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188. – P. 1542–1544.

4. *Balslev*, *E.* Spectral properties of many body Schrodinger operators with dilation-analytic interactions / E. Balslev, J.M. Combes // Commun. Math. Phys. – 1971. – Vol. 22. – P. 280–294.

5. *Kapshai*, *V.* Integral equations for the Jost solutions and decaying resonance states / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // Известия Гомельского государственного университета. – 2006. – № 6 (39). – С. 3–8.

6. *Kapshai*, *V.* Integral equations for different wave functions and their use for resonance finding / V. Kapshai, K. Shilyaeva, N. Elander // J. Phys. B. – 2009. – Vol. 42, № 4. – P. 044001.

7. *Капшай*, *В.Н.* Определение влияния резонансов на сечение рассеяния на основе интегрального уравнения Фредгольма / В.Н. Капшай, К.П. Шиляева // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 4 (5). – С. 10–17.

8. *Капшай*, *В.Н.* Резонансные состояния составных систем и ковариантные двухчастичные уравнения теории поля / В.Н. Капшай, К.П. Шиляева, Ю.А. Гришечкин // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности: Сборник научных трудов / Ин-т физики НАН Беларуси. – Минск, 2011. – С. 79–88.

9. *Logunov*, *A.A.* Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.

10. *Kadyshevsky*, *V.G.* Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, № 1. – P. 125–148

11. *Кадышевский*, *В.Г.* Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.

12. *Alferova, T.A.* Expansion in terms of matrix elements of the Lorentz group unitary irreducible representations and integral equations for scattering states relativistic wave functions / T.A. Alferova, V.N. Kapshai // Nonlinear phenomena in complex systems: Proced. of the Sixth Annual Seminar NPCS'97 / Academy of Sciences of Belarus. Inst. of Phys. – Minsk, 1998. – P. 78–85.

13. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

14. *Grishechkin*, *Yu.A.* Numerical solution of relativistic problems on bound states of systems of two spinless particles / Yu.A. Grishechkin, V.N. Kapshai // Russian Physics Journal. – 2013. – Vol. 56, № 4. – P. 435–443.

Поступила в редакцию 24.07.14.